OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

FAZA ZONALĂ 2012

CLASA a VII-a

1. Fie numerele:

   $a = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{35}} + \cdots \frac{\sqrt{2013}-2011}{\sqrt{4048143}} + \frac{1}{\sqrt{2013}}$

   $b = (|3^{51} - 2^{25}| + 3^{2012} : 81^{490} : 3) : (-4^{41}) + \sqrt{1296} + \sqrt{(8-5\sqrt{3})^2} - \sqrt{75} + \sqrt{2^8}$.

 i) Calculați media geometrică a numerelor a și b.

 ii) Verificați dacă $3a$ și $\sqrt{b}$ sunt elemente ale mulțimii $A = \left\{x \in \mathbf{Z} \middle| \frac{3x+1}{4x-5} \in \mathbf{Z}\right\}$.

2. Știind că $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, $\forall$ a, b $\in \mathbf{R}_+$.

   a) Arătați că $\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{12}}{7} + \cdots + \frac{\sqrt{1004 \cdot 1005}}{2009} < 502$

   b) Dacă $x \geq 4$, $y \geq 9$ și $z \geq 16$, arătați că:

   $2\sqrt{x-4} + 3\sqrt{y-9} + 4\sqrt{z-16} \leq \frac{x+z+y}{2}$.

3. În patrulaterul convex ABCD, M și N sunt mijloacele laturilor $[DC]$ respectiv $[BC]$. Fie $AC \cap BD = \{O\}$ și $MN \cap AC = \{P\}$. Arătați că dacă O este centrul de greutate al triunghiului AMN, atunci patrulaterul ABCD este paralelogram.

4. Fie ABCD un patrulater convex în care $AD = DC - 1 = \frac{AB}{2} = \frac{AC}{2} = \frac{BC+2}{2} = 5$, iar $[AM]$ mediană în ΔABC și $N \in (CD)$ astfel încât $BM = CN$. Dacă P este intersecția bisectoarei $\measuredangle ABC$ cu mediana $[AM]$, iar Q este centru cercului înscris în ΔACD se cere:

   a) Perimetrul patrulaterului ABCD;

   b) Arătați că punctele A, Q și N sunt coliniare;

   c) Arătați că $PQ \parallel MN$.

Timp de lucru: 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii; fiecare subiect este notat cu 7 puncte.